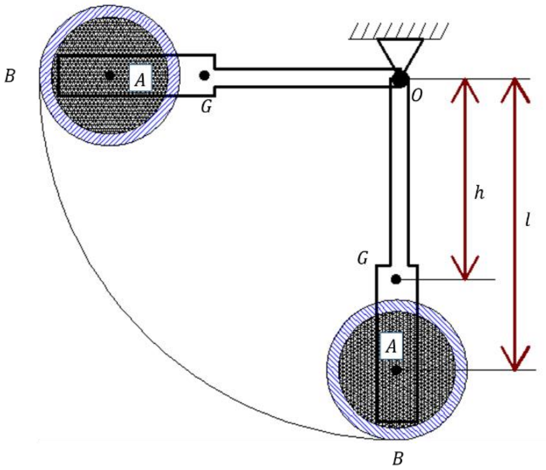
تحريك الجسم الصلب
(الحركة المستوية العامة)

م.غيث برهاني

المسألة الأولى:

دولاب كتلته $M = 4\ kg$, نصف قطره $R = 250\ mm$ عزم عطالته حول مركز ثقله A, $I_A = M.R^2$, يتمفصل مركز ثقله A مع ذراع OA تدور حول مسند مثبت عند O طول الذراع $OA = L = 500\ mm$ يبعد المسند عن مركز ثقل الذراع G, $h = OG = 300\ mm$ حيث كتلة الذراع $m = 3\ kg$ وعزم عطالتها حول O, $I_O = M.\rho_O^2$

حيث $\rho_O = 350\ mm$, فإذا تحركت من السكون في الوضع الابتدائي حيث OA افقي يتدحرج الدولاب على السطح الدائري الثابت دون انزلاق.



المطلوب:

إيجاد السرع عندما يصبح OA شاقوليا (أي أوجد سرع عناصر الجملة)

($\omega = ?$ سرعة الدولاب الزاوية, $v_A = ?$ سرعة مركزه الخطية)

($\omega_1 = ?$ سرعة الذراع الزاوية, $v_G = ?$ سرعة مركز كتله الخطية)

الحل:

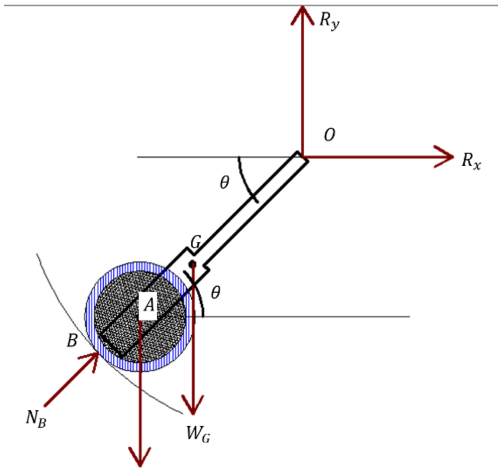
لإيجاد سرع عناصر الجملة نطبق مبدأ العمل والطاقة على الجملة المتمثلة بـ(القرص المتحرك حركة مستوية عامة والذراع الذي يتحرك حركة دوراني لا مركزية) بين وضعين الوضع الابتدائي الساكن حيث OA أفقي,والوضع النهائي حيث OA شاقولي .

ولإيجاد القوى نحرر الجملة من قيودها:

$$E_1^{\text{جملة}} - E_0^{\text{جملة}} = \Sigma W_F = W_{Rx} + W_{Ry} + W_{NB} + W_{WG} + W_{WA} \ldots 1$$

$$W_{Rx} = W_{Ry} = 0 \quad \text{(لأن القوة لا تنتقل)}$$

$W_{NB} = 0$ (عمودية على الانتقال في كل لحظة)



$$W_{WA} = M.g.OA = M.g.L$$

$$W_{WG} = m.g.OG = m.g.h$$

$E_0 = 0$ (لأن الجملة بدأت من السكون)

$$E_1 = \frac{1}{2}M.v_A^2 + \frac{1}{2}I_A.\omega^2 + \frac{1}{2}I_0.\omega_1^2$$

_ملاحظة :(أول حدين دلالة حركة الدولاب المستوية أما الحد الأخير دلالة حركة الساق الدورانية اللامركزية حول O)

_ملاحظة:(في حال أعطي عزم عطالة <u>الساق</u> حول G نطبق نظرية هويغنز لنحصل على العزم حول O (لان Oمحور الدوران)

ولدينا: $I_0 = m.\rho_0^2$, $I_A = M.R^2$

وبما أن A نقطة مشتركة بين الذراع والدولاب فلها نفس السرعة أي :

(بالنسبة للدولاب) $v_A = \omega.BA = \omega.R$

(بالنسبة للذراع) $v_A = \omega_1.OA = \omega_1.L$

ومنه: $\omega_1 = \frac{R}{L}.\omega$ أو: $\omega = \frac{L}{R}.\omega_1$

نعوض كل ماسبق بالمعادلة 1:

$$\frac{1}{2}M.\omega^2.R^2 + \frac{1}{2}(M.R^2)\omega^2 + \frac{1}{2}(m.\rho_0^2).\frac{R^2}{L^2}.\omega^2$$
$$= M.g.L + M.g.h$$

$$\Rightarrow M.\omega^2.R^2 + \frac{1}{2}(m.\rho_0^2).\frac{R^2}{L^2}.\omega^2 = g(M.L + m.h)$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{g(M.L + m.h)}{R^2\left(M + \frac{1}{2L^2}.m.\rho_0^2\right)} = \frac{9.8(4*0.5 + 3*0.3)}{(0.25)^2\left(4 + \frac{3*(0.35)^2}{2*(0.5)^2}\right)}$$

$\omega^2 = 96.03 \Rightarrow \omega = 9.8\, rad.s^{-1}$ جهة الدوران عكس عقارب الساعة

$\omega_1 = \frac{R}{L}.\omega = \frac{0.25}{0.5}(9.8) = 4.9\, rad.s^{-1}$ جهة الدوران عكس عقارب الساعة

$$v_A = \omega.R = 9.8 * 0.25 = 2.45\, m.s^{-1}$$

المسألة الثانية:

جملة ميكانيكية مؤلفة من اسطوانة كتلتها $m_A = m$ نصف قطرها R عزم عطالتها حول O مركز كتلتها $I_0 = m.\frac{R^2}{2}$ قابلة للتدحرج على مستوي خشن f. والجسم الثاني كتلته $m_B = 2m$ قابل للانزلاق على سطح خشن f يتمفصل الجسم A مع B وفق قضيب BO مهمل الكتلة تبدأ الجملة حركتها من السكون بتدحرج الاسطوانة مسافة $\Delta x = \Delta 0$ والمطلوب مايلي:

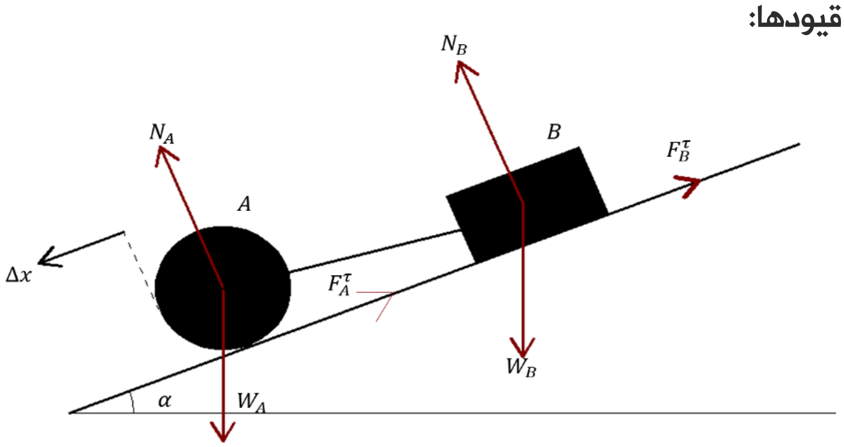
1)سرع عناصر الجملة.2)الزاوية α التي تحقق شرط الحركة المفروضة.

الحل:

لإيجاد سرع عناصر الجملة نطبق مبدأ العمل والطاقة على الجملة المتمثلة بـ(الاسطوانة المتحركة حركة مستوية عامة والجسم B المتحرك بحركة انسحابية) بين وضعين الابتدائي الساكن....والنهائي المحدد بالانتقال Δx

$$E_1^{\text{جملة}} - E_0^{\text{جملة}} = \Sigma W_F \dots 1$$

1. **لتحديد الأعمال نحرر الجملة من قيودها:**



$$W_{NB} = W_{NA} = 0 \quad \text{(عمودي على الانتقال في كل لحظة)}$$

$$W_{FA}^t = 0 \quad \text{(عمل الاحتكاك في التدحرج معدوم)}$$

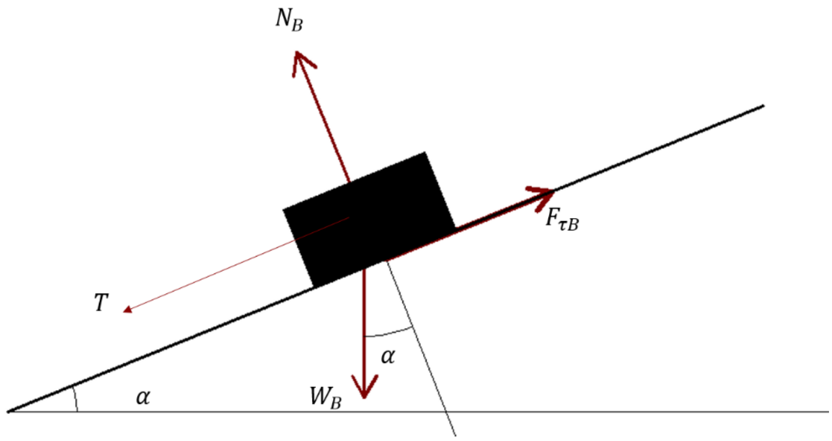
$$W_{WA} = \boldsymbol{m_A}.g.H = m.g(\Delta x.sin\alpha)$$

$$W_{WB} = m_B.g.H = 2m.g.(\Delta x.sin\alpha)$$

$$W_{FB}^t = -F_B^t.(\Delta x) \quad \text{(الانتقال ليس شاقولي)}$$

$$F_B^t = f.N_B$$

لحساب N_B نطبق علاقة حركة الجسم على الجسم B بعد تحريره من قيوده:



$$\Sigma\overrightarrow{F_e} = m_B.\overrightarrow{A_B} \Rightarrow \overrightarrow{W_B} + \overrightarrow{N_B} - \overrightarrow{F_B^t} + \vec{T} = \overrightarrow{m_B}.\overrightarrow{A_B}$$

نسقط على محور عمودي على محور الحركة موجه نحو الأعلى

$$-W_B.cos\alpha + N_B = 0 \Rightarrow N_B = w_B.cos\alpha \Rightarrow N_B = 2m.g.cos\alpha$$

$$E_1 = \frac{1}{2}M_A.v_0^2 + \frac{1}{2}I_0.\omega^2 + \frac{1}{2}m_B.v_B^2$$

لدينا:

$$I_O = \frac{1}{2}m_A.R^2 = \frac{1}{2}m.R^2$$

$v_0 = \omega.I_O = \omega.R$ (**لان I مركز آني يحدد بنقطة تماسه مع السطح الثابت**)

$v_B = v_0$ (**لانهما متصلان بواسطة القضيب فلهما نفس السرعة**)

$$\Rightarrow \text{v}_B = v_0 = \omega.R$$

نعوض كل ماسبق في 1:

$$\frac{1}{2}m.\omega^2.R^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}m.R^2\right)\omega^2 + \frac{1}{2}(2m.\omega^2.R^2) = m.g.\Delta x.sin\alpha + 2m.\Delta x.sin\alpha - f(2m.g.cos\alpha)\Delta x$$

$$\Rightarrow \frac{7}{4}m.R^2.\omega^2 = 3m.g.\Delta x.sin\alpha - 2m.g.f.cos\alpha.\Delta x$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{4g}{7R^2}(3sin\alpha - 2f.cos\alpha)\Delta x$$

$$v_0^2 = v_B^2 = R^2.\omega^2 = \frac{4g}{7}(3sin\alpha - 2f.cos\alpha)\Delta x$$

2. **شرط الحركة (تسارع الجسم القائد أكبر من الصفر).**

- **والجسم القائد هو الذي سبب الحركة.**

- الذي سبب الحركة هو ذو الكتلة الأكبر.
- في هذه المسألة حالة خاصة وهي ان التسارعين غير متساويين.
- أحيانا يطلب شرط التدحرج $F^t < f.N$

باشتقاق المعادلة (للحصول على التسارع)بالنسبة للزمن:

$$2v_0.\frac{dv_A}{dt} = 4g(3sin\alpha + 2f.cos\alpha)\frac{d(\Delta x)}{dt}$$

$$\frac{d(\Delta x)}{dt} = v_A \Rightarrow A_O = \frac{2g}{7}(3sin\alpha - 2f.cos\alpha)$$

شرط الحركة : $A_O > 0 \Rightarrow \frac{2g}{7}(3sin\alpha - 2f.cos\alpha) > 0$

$$\Rightarrow\ 3sin\alpha - 2f.cos\alpha > 0$$

$$\Rightarrow tan\alpha > +\frac{2}{3}f$$